軸対称ノズル内の遷音速流れ（そのⅡ）

山口　　　巖

Abstract

In this paper, the transonic flow in the throat region of a axially-symmetric nozzle, which is identical with the flow treated in the previous paper[1], is studied. It is shown that an inner solution to the fourth-order approximation can be derived systematically by the derivation of an outer solution to the ninth-order approximation and by using the methods of matched asymptotic expansions. When comparing the inner solution obtained in this paper with Hall's solution[3], though his solution corresponds to the present inner solution to the third-order approximation, and in reviewing his work, it was discovered that his axisymmetric solution contained errors in the third-order solution and the ratio of the mass flow. Since his work is widely used in the field, the corrected third-order axisymmetric solution is given. Numerical examples are also given for air (the ratio of specific heats $\gamma=1.4$) flowing through nozzles with some values of small parameter E^*.

1. 緒言と要約

前論文[1]では，軸対称なノズル内で，連続的な速度を伴ってスロート上流での亜音速流から下流での超音速流へ変化する流れが考察された。外部領域における，すなわちスロートを中心として軸方向の長さがスロート半値幅のオーダーと等しくなる流れ領域における解が見出された。その解はスロート近傍で一様に有効ではなくなることが示された。この非一様性を研究するために，スロート近傍に内部領域が導入され，そこでの定式化と解析が試みられた。接合漸近展開法[2]の適用により，外部領域での解と内部領域での解の接合を通して外

部解に置かれるべき条件が見出された。そして，接合の結果を踏まえ，放物線形で指定されたノズル壁に対して，第2オーダー内部解が第2オーダー内部方程式を陽に解くことなしに，高次オーダーの外部解から系統的に導出できることが示された。こうして得られた第2オーダー内部解は，まったく同様の問題を異なった方法で解析した Hall[3] の解と完全に一致することも示された。

本論文では，前論文と同様，軸対称ノズル内のスロート領域での遷音速流れが研究される。第9オーダーまでの外部解の導出および接合漸近展開法の適用により，第4オーダーまでの内部解が系統的に導出できることが示される。得られた内部解と Hall の解，彼の解は本論文での第3オーダーまでの内部解に相当するが，とを比較するとき，そして彼の研究を見直すとき，彼の軸対称解は第3オーダー解および質量流比に一部誤りを含んでいることが見出された。彼の研究はこの分野で広範に引用されるので訂正された第3オーダーの軸対称解が与えられる。ノズル内を通り過ぎる空気（比熱比 $\gamma=1.4$）の流れに対し，小パラメータ E^* のいくつかの値に対する数値計算例も与えられる。

2. 外部領域での定式化と外部解

前論文[1]と同様，軸対称収縮一拡大ノズルに対して座標原点はノズルスロートの中心に取られ，x, r は，それぞれスロート半値幅で無次元された，ノズル中心線にそうて下流方向に，そしてそれに垂直に測られた座標とする。

ノズル壁の形 $r_w(x)$ は前論文の接合の結果を踏まえて，

(1)　$r_w=1+\dfrac{x^2}{2}E^2$

で指定されるものとする。ここで，E^2 は $E^2 \ll 1$ であり，スロートでの壁の曲率半径に対するスロート半値幅の比を与える。

流れは非回転であると仮定されるので，臨界音速 $\bar{a}^*$ でそれぞれ無次元化された x および r 方向の速度成分 U および V は次の非回転式を満たさなければならない。ここで，上付きバーは有次元量を表す。

(2)　$V_x=U_r$

ここで，添字 x, r はそれぞれ偏微分を表す。以下同様である。
また，ベルヌーイの方程式といわゆる気体力学方程式は次で与えられる。

(3)　$a^2=\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}(U^2+V^2)$

(4)　$(a^2-U^2)U_x-2UVU_r+(a^2-V^2)V_r+\frac{a^2V}{r}=0$

ここで，a は a^* で無次元化された局所音速であり，γ は比熱比である。
前論文では速度ポテンシャルを用いての定式化が行われたが，本論文では速度成分を用いての定式化が行われ解析される。

考察中の外部領域では V は小さく，U は近似的に1に等しいと考えられるので，次で定義される摂動速度成分 u, v が導入される。

(5)　$U=1+u,\qquad V=v$

ここで，$u, v<1$ である。式(5)の式(2),(3),(4)への代入は次式を与える。

(6)　$v_x=u_r$

(7)
$$v_r+\frac{v}{r}=\left\{(\gamma+1)u+\frac{\gamma+1}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{2}v^2\right\}u_x+2(1+u)vu_r$$
$$+\left\{(\gamma-1)u+\frac{\gamma-1}{2}u^2+\frac{\gamma+1}{2}v^2\right\}v_r$$
$$+\left\{(\gamma-1)u+\frac{\gamma-1}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{2}v^2\right\}\frac{v}{r}$$

ノズル壁での境界条件は次である。

(8)　$r=r_w$ で，$\frac{v}{1+u}=\frac{dr_w}{dx}$

また，流れの軸対称性条件は次である。

(9)　$r=0$ で，$v=0$

u, v が小パラメータ E によって次の如く展開できると仮定されるならば，

(10)　$u=Eu_1+E^2u_2+E^3u_3+E^4u_4+E^5u_5+E^6u_6+E^7u_7+E^8u_8+\cdots$

(11)　$v=Ev_1+E^2v_2+E^3v_3+E^4v_4+E^5v_5+E^6v_6+E^7v_7+E^8v_8+E^9v_9+\cdots$

ここで，E は $E<1$ であり，ノズルスロートから距離 $x=O(1)$ での流速と音速の典型的な差の目安を与える。これらの展開を式（6），（7）に代入し，E の同じベキの係数をそれぞれ等しいと置くとき，次の2組の方程式を導く。

(12)　$v_{nx}=u_{nr}\quad(n\geqq 1)$

そして，

(13)　$v_{1r}+\dfrac{1}{r}v_1=0$

(14)　$v_{nr}+\dfrac{1}{r}v_n=\phi_{n-1}\quad(n\geqq 2)$

ここで，ϕ_n は $u_1, u_2, \cdots, u_n$ および $v_1, v_2, \cdots, v_n$ のみの関数であり，引き続く解析において必要とされるオーダーまでの $\phi_n(n=1, 2, \cdots, 8)$ は付録1に与えられる。

級数（10），（11）が境界条件（8）に代入され，$r=r_w$ での摂動速度成分の各オーダーの係数 u_n, v_n が，それらのテーラー展開を用いて，$r=1$ でのそれらの値とそれらの微係数で表されるとき，E の同じベキの係数をそれぞれ等しいと置くならば，次の境界条件の組を導く。

(15)　$v_n(x, 1)=\psi_n\quad(n\geqq 2)$

引き続く解析において必要とされるオーダーまでの $\psi_n(n=2, 3, \cdots, 9)$ は付録2に与えられる。

級数（10），（11）の条件（9）への代入は軸対称性条件に対して次を与える。

(16)　$v_n(x, 0)=0\quad(n\geqq 1)$

解 $u_n(n=1, 2, 3, 4)$ および解 $v_n(n=1, 2, 3, 4, 5)$ はすでに前論文で求められており，次である。

(17)　$u_1=\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}x$

(18)　$v_1=0$

(19)　$u_2=\dfrac{1}{2}r^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2\gamma-3}{3(\gamma+1)}x^2$

(20) $v_2 = rx$

(21) $u_3 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x\left\{\frac{2}{\gamma+1}r^2 - \frac{5}{4(\gamma+1)}\right\} + \frac{4\gamma^2-57\gamma+27}{36(\gamma+1)^2}x^3\right]$

(22) $v_3 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{4}r + \frac{2}{\gamma+1}rx^2\right]$

(23) $u_4 = \frac{2\gamma+9}{24}r^4 - \frac{4\gamma+15}{24}r^2 + \frac{10\gamma+57}{288} - x^2\left\{\frac{7\gamma-3}{4(\gamma+1)}r^2 - \frac{13\gamma-27}{24(\gamma+1)}\right\} +$

$+\frac{8\gamma^3+270\gamma^2-477\gamma+135}{540(\gamma+1)^2}x^4$

(24) $v_4 = x\left\{\frac{2\gamma+9}{6}r^3 - \frac{4\gamma+15}{12}r\right\} - \frac{7\gamma-3}{6(\gamma+1)}rx^3$

(25) $v_5 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\gamma+3}{9}r^5 - \frac{20\gamma+63}{96}r^3 + \frac{28\gamma+93}{288}r + x^2\left\{\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{96(\gamma+1)}r^3 -\right.\right.$

$\left.\left.- \frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{96(\gamma+1)}r\right\} + \frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{36(\gamma+1)^2}rx^4\right]$

解 u_5 は $n=5$ の場合の非回転式 (12)，すなわち

$$v_{6x} = u_{6r}$$

を積分することにより求められ次で与えられる。

(26) $u_5 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x\left\{\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{192(\gamma+1)}r^4 - \frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{96(\gamma+1)}r^2\right\} +\right.$

$\left.+\frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{18(\gamma+1)^2}r^2x^3\right] + h_5(x)$

ここで，$h_5(x)$ は任意の積分関数であり，第6オーダーの解 v_6 を求める過程で決定される。

解 v_6 は $n=6$ の場合の支配方程式 (14)，すなわち

$$v_{6r} + \frac{1}{r}v_6 = \phi_5$$

が積分され，境界条件 (15) および軸対称性条件 (16)，すなわち

$$v_6(x,\ 1) = \phi_6, \qquad v_6(x,\ 0) = 0$$

を適用することにより求められ次で与えられる。ここで，ϕ_5, ϕ_6 はそれぞれ付録1の（A1. 5)，付録2の（A2. 5) で与えられ，より低次の u_n, v_n を用いて評価される。

$$(27)\quad v_6=x\left\{\frac{556\gamma^2+1737\gamma+3069}{1728}r^5-\frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{576}r^3+\right.$$

$$\left.+\frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{864}r\right\}+x^3\left\{\frac{(184\gamma^2+642\gamma-45)(\gamma-3)}{540(\gamma+1)}r^3-\right.$$

$$\left.-\frac{(184\gamma^2-282\gamma+315)(\gamma+3)}{540(\gamma+1)}r\right\}+\frac{(8\gamma^2+585\gamma-297)\gamma}{540(\gamma+1)^2}rx^5$$

また，積分関数 $h_5(x)$ は次で与えられる。

$$(28)\quad h_5(x)=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{16\gamma^4-744\gamma^3+9441\gamma^2-5814\gamma+945}{8640(\gamma+1)^3}x^5-\right.$$

$$\left.-\frac{44\gamma^2-447\gamma+477}{288(\gamma+1)^2}x^3+\frac{92\gamma^2+180\gamma+639}{576(\gamma+1)}x\right]$$

解 u_6 は解 u_5 を求めたと同様の方法によって次で与えられる。

$$(29)\quad u_6=\frac{556\gamma^2+1737\gamma+3069}{10368}r^6-\frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{2304}r^4+$$

$$+\frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{1728}r^2-\frac{2708\gamma^2+7839\gamma+14211}{82944}+$$

$$+x^2\left\{\frac{(184\gamma^2+642\gamma-45)(\gamma-3)}{720(\gamma+1)}r^4-\frac{(184\gamma^2-282\gamma+315)(\gamma+3)}{360(\gamma+1)}r^2+\right.$$

$$\left.+\frac{676\gamma^3+1770\gamma^2+1926\gamma+7605}{4320(\gamma+1)}\right\}+x^4\left\{\frac{(8\gamma^2+585\gamma-297)\gamma}{216(\gamma+1)^2}r^2-\right.$$

$$\left.-\frac{56\gamma^3+1170\gamma^2-2979\gamma+2025}{2160(\gamma+1)^2}x^4\right\}-$$

$$-\frac{(16\gamma^4+420\gamma^3+11412\gamma^2-19845\gamma+6561)\gamma}{34020(\gamma+1)^3}x^6$$

以下，同様にして，解 u_7, v_7, u_8, v_8, v_9 は次で与えられる。

$$(30)\quad u_7=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x\left\{\frac{4364\gamma^3+12525\gamma^2+9219\gamma+18990}{12960(\gamma+1)}r^6-\right.\right.$$

$$-\frac{26032\gamma^3+73560\gamma^2+78627\gamma+112995}{23040(\gamma+1)}r^4+$$

$$+\frac{43184\gamma^3+116160\gamma^2+154269\gamma+183465}{34560(\gamma+1)}r^2-$$

$$\left.-\frac{124288\gamma^3+340140\gamma^2+538503\gamma+638325}{414720(\gamma+1)}\right\}+$$

$$+x^3\left\{\frac{5008\gamma^4-936\gamma^3-14823\gamma^2-133542\gamma-31671}{13824(\gamma+1)^2}r^4-\right.$$

$$-\frac{5008\gamma^4+6552\gamma^3-87\gamma^2-49878\gamma+23625}{6912(\gamma+1)^2}r^2+$$

$$\left.+\frac{9392\gamma^4+27204\gamma^3+40284\gamma^2+26361\gamma+160569}{41472(\gamma+1)^2}\right\}+$$

$$+x^5\left\{\frac{16\gamma^4-1224\gamma^3+20121\gamma^2+6426\gamma+2025}{2880(\gamma+1)^3}r^2-\right.$$

$$\left.-\frac{272\gamma^4-7368\gamma^3+90537\gamma^2-138438\gamma+51705}{69120(\gamma+1)^3}\right\}-$$

$$\left.-\frac{8896\gamma^6+36720\gamma^5-1251468\gamma^4+14995125\gamma^3-8173089\gamma^2+701055\gamma+212625}{21772800(\gamma+1)^4}x^7\right]$$

(31) $$v_7=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{6836\gamma^2+23031\gamma+30627}{82944}r^7-\frac{3380\gamma^2+11391\gamma+15291}{13824}r^5+\right.$$

$$+\frac{3424\gamma^2+11271\gamma+15228}{13824}r^3-\frac{7100\gamma^2+22311\gamma+30249}{82944}r+$$

$$+x^2\left\{\frac{4364\gamma^3+12525\gamma^2+9219\gamma+18990}{4320(\gamma+1)}r^5-\right.$$

$$-\frac{26032\gamma^3+73560\gamma^2+78627\gamma+112995}{11520(\gamma+1)}r^3+$$

$$\left.+\frac{43184\gamma^3+116160\gamma^2+154269\gamma+183465}{34560(\gamma+1)}r\right\}+$$

$$+x^4\left\{\frac{5008\gamma^4-936\gamma^3-14823\gamma^2-133542\gamma-31671}{13824(\gamma+1)^2}r^3-\right.$$

$$-\frac{5008\gamma^4+6552\gamma^3-87\gamma^2-49878\gamma+23625}{13824(\gamma+1)^2}r\Big\}+$$

$$+\frac{16\gamma^4-1224\gamma^3+20121\gamma^2+6426\gamma+2025}{8640(\gamma+1)^3}rx^6\Big]$$

$$u_8=\frac{22052\gamma^3+83079\gamma^2+126162\gamma+123957}{497664}r^8- \tag{32}$$

$$-\frac{119648\gamma^3+436140\gamma^2+675693\gamma+632745}{622080}r^6+$$

$$+\frac{70208\gamma^3+236760\gamma^2+368433\gamma+328725}{207360}r^4-$$

$$-\frac{690256\gamma^3+2074680\gamma^2+3195081\gamma+2741985}{2488320}r^2+$$

$$+\frac{205436\gamma^3+605955\gamma^2+989751\gamma+917505}{4147200}+$$

$$+x^2\Big\{\frac{35440\gamma^4+87312\gamma^3+21717\gamma^2-213786\gamma-11583}{62208(\gamma+1)}r^6-$$

$$-\frac{138128\gamma^4+363024\gamma^3+312363\gamma^2-47466\gamma+346275}{69120(\gamma+1)}r^4+$$

$$+\frac{118592\gamma^4+320892\gamma^3+402147\gamma^2+391527\gamma+485190}{51840(\gamma+1)}r^2-$$

$$-\frac{723512\gamma^4+2122350\gamma^3+3313017\gamma^2+4450950\gamma+4328235}{1244160(\gamma+1)}\Big\}+$$

$$+x^4\Big\{\frac{7712\gamma^5-7728\gamma^4-39342\gamma^3+212247\gamma^2-324\gamma+2835}{36288(\gamma+1)^2}r^4-$$

$$-\frac{7712\gamma^5+7728\gamma^4-13050\gamma^3+35343\gamma^2-101817\gamma+34020}{18144(\gamma+1)^2}r^2+$$

$$+\frac{146512\gamma^5+451836\gamma^4+587358\gamma^3+607446\gamma^2-473499\gamma+3234735}{1088640(\gamma+1)^2}\Big\}+$$

$$+x^6\Big\{-\frac{(32\gamma^4+1344\gamma^3+60183\gamma^2-21546\gamma-5589)\gamma}{19440(\gamma+1)^3}r^2+$$

$$+\frac{320\gamma^5+4872\gamma^4+105642\gamma^3-305613\gamma^2+282042\gamma-59535}{272160(\gamma+1)^3}\Big\}-$$

$$-\frac{(64\gamma^6-384\gamma^5-7236\gamma^4-173340\gamma^3+264861\gamma^2-47466\gamma-24219)\gamma}{816480(\gamma+1)^4}x^8$$

$$(33)\quad v_8=x\left\{\frac{22052\gamma^3+83079\gamma^2+126162\gamma+123957}{62208}r^7-\right.$$

$$-\frac{119648\gamma^3+436140\gamma^2+675693\gamma+632745}{103680}r^5+$$

$$+\frac{70208\gamma^3+236760\gamma^2+368433\gamma+328725}{51840}r^3-$$

$$\left.-\frac{690256\gamma^3+2074680\gamma^2+3195081\gamma+2741985}{1244160}r\right\}+$$

$$+x^3\left\{\frac{35440\gamma^4+87312\gamma^3+21717\gamma^2-213786\gamma-11583}{31104(\gamma+1)}r^5-\right.$$

$$-\frac{138128\gamma^4+363024\gamma^3+312363\gamma^2-47466\gamma+346275}{51840(\gamma+1)}r^3+$$

$$\left.+\frac{118592\gamma^4+320892\gamma^3+402147\gamma^2+391527\gamma+485190}{77760(\gamma+1)}r\right\}+$$

$$+x^5\left\{\frac{7712\gamma^5-7728\gamma^4-39342\gamma^3+212247\gamma^2-324\gamma+2835}{45360(\gamma+1)^2}r^3-\right.$$

$$\left.-\frac{7712\gamma^5+7728\gamma^4-13050\gamma^3+35343\gamma^2-101817\gamma+34020}{45360(\gamma+1)^2}r\right\}-$$

$$-\frac{(32\gamma^4+1344\gamma^3+60183\gamma^2-21546\gamma-5589)\gamma}{68040(\gamma+1)^3}rx^7$$

$$(34)\quad v_9=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{893812\gamma^3+3691035\gamma^2+6079392\gamma+4903335}{12441600}r^9-\right.$$

$$-\frac{2983712\gamma^3+12072780\gamma^2+20173167\gamma+16362675}{9953280}r^7+$$

$$+\frac{497312\gamma^3+1907268\gamma^2+3201669\gamma+2603745}{995328}r^5-$$

$$-\frac{3925808\gamma^3+13885560\gamma^2+23125563\gamma+18781065}{9953280}r^3+$$

$$+\frac{1017792\gamma^3+3277360\gamma^2+5348772\gamma+4319685}{8294400}r+$$

$$+x^{2}\left\{\frac{16223248\gamma^{4}+61578792\gamma^{3}+88988733\gamma^{2}+55031562\gamma+54801765}{9953280(\gamma+1)}r^{7}-\right.$$

$$-\frac{9484048\gamma^{4}+34869000\gamma^{3}+53421333\gamma^{2}+45969210\gamma+37496925}{1658880(\gamma+1)}r^{5}+$$

$$+\frac{12272768\gamma^{4}+41626668\gamma^{3}+65218173\gamma^{2}+67391253\gamma+48969900}{1658880(\gamma+1)}r^{3}-$$

$$\left.-\frac{32955568\gamma^{4}+100624032\gamma^{3}+156700053\gamma^{2}+178919172\gamma+120321855}{9953280(\gamma+1)}r\right\}+$$

$$+x^{4}\left\{\frac{4494640\gamma^{5}+8848728\gamma^{4}-5662017\gamma^{3}-20637162\gamma^{2}-48634317\gamma-12439980}{2177280(\gamma+1)^{2}}r^{5}-\right.$$

$$-\frac{57876160\gamma^{5}+137988144\gamma^{4}+65840004\gamma^{3}-58689351\gamma^{2}-218267946\gamma+51469425}{11612160(\gamma+1)^{2}}r^{3}+$$

$$\left.+\frac{20342848\gamma^{5}+55198416\gamma^{4}+60461388\gamma^{3}+47530791\gamma^{2}+34268130\gamma+66443895}{6967296(\gamma+1)^{2}}r\right\}+$$

$$+x^{6}\left\{\frac{3596864\gamma^{6}-6986160\gamma^{5}-22690692\gamma^{4}-1845585\gamma^{3}+371321469\gamma^{2}+226810125\gamma+49432275}{24883200(\gamma+1)^{3}}r^{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{3596864\gamma^{6}+2028240\gamma^{5}-12031812\gamma^{4}-16910505\gamma^{3}+80883549\gamma^{2}-45489195\gamma+8122275}{24883200(\gamma+1)^{3}}r\right\}-$$

$$-\frac{8896\gamma^6+56880\gamma^5-2773548\gamma^4+38805345\gamma^3+25276131\gamma^2}{21772800(\gamma+1)^4}$$

$$\left.\frac{+11349315\gamma+2764125}{rx^8}\right]$$

この節で導出された外部解 U, V は明らかに $x\to 0$ のとき一様に有効ではなくなる。したがって，スロート近傍では有効な解とはなり得ない。しかし，接合漸近展開法の適用により，スロート近傍で遷音速小擾乱方程式およびその高次の方程式を満たす解（内部解）が外部解から系統的に導出できるという点で，この外部解は意味ある解である。次節では内部解の導出が試みられる。

3. 内部領域での解

前論文[1)]の接合の結果を踏まえ，内部領域での解析のために次の新しい座標が導入される。

(35) $x=\left(\frac{\gamma+1}{2}E^*\right)^{\frac{1}{2}}x^*, \qquad r=r$

ここで，E^* は 1 より小さいパラメータであり，外部領域での展開パラメータ E と次の関係にある。

(36) $E^{*\frac{1}{2}}=E$

また，内部領域において U, V は小パラメータ E^* によって次の如く展開される。

(37) $U=1+u^*$

$$=1+E^*u^*_1+E^{*2}u^*_2+E^{*3}u^*_3+E^{*4}u^*_4+\cdots$$

(38) $V=\left(\frac{\gamma+1}{2}E^*\right)^{\frac{1}{2}}v^*$

$$=\left(\frac{\gamma+1}{2}E^*\right)^{\frac{1}{2}}(E^*v^*_1+E^{*2}v^*_2+E^{*3}v^*_3+E^{*4}v^*_4+\cdots)$$

接合漸近展開法[2)]の適用により，外部解から内部解を系統的に導出すること

ができる。すなわち，外部速度成分が内部座標変数で書き換えられ E のベキごとにまとめられるとき，それらと，関係（36）を用いて E 展開の形に書き換えられた内部速度成分とが比較され，E の同じベキの係数がそれぞれ等しいと置かれるならば，内部摂動速度成分は次で与えられる。

(39) $$u^*_1=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}+x^*$$

(40) $$v^*_1=\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+rx^*$$

(41) $$u^*_2=\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2+\frac{10\gamma+57}{288}+x^*\left\{r^2-\frac{5}{8}\right\}-\frac{2\gamma-3}{6}x^{*2}$$

(42) $$v^*_2=\frac{\gamma+3}{9}r^5-\frac{20\gamma+63}{96}r^3+\frac{28\gamma+93}{288}r+x^*\left\{\frac{2\gamma+9}{6}r^3-\frac{4\gamma+15}{12}r\right\}+rx^{*2}$$

(43) $$\begin{aligned}u^*_3=&\frac{556\gamma^2+1737\gamma+3069}{10368}r^6-\frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{2304}r^4+\\&+\frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{1728}r^2-\frac{2708\gamma^2+7839\gamma+14211}{82944}+\\&+x^*\left\{\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{384}r^4-\frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{192}r^2+\right.\\&\left.+\frac{92\gamma^2+180\gamma+639}{1152}\right\}+x^{*2}\left\{-\frac{7\gamma-3}{8}r^2+\frac{13\gamma-27}{48}\right\}+\frac{4\gamma^2-57\gamma+27}{144}x^{*3}\end{aligned}$$

(44) $$\begin{aligned}v^*_3=&\frac{6836\gamma^2+23031\gamma+30627}{82944}r^7-\frac{3380\gamma^2+11391\gamma+15291}{13824}r^5+\\&+\frac{3424\gamma^2+11271\gamma+15228}{13824}r^3-\frac{7100\gamma^2+22311\gamma+30249}{82944}r+\\&+x^*\left\{\frac{556\gamma^2+1737\gamma+3069}{1728}r^5-\frac{388\gamma^2+1161\gamma+1881}{576}r^3+\right.\\&\left.+\frac{304\gamma^2+831\gamma+1242}{864}r\right\}+x^{*2}\left\{\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{192}r^3-\right.\\&\left.-\frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{192}r\right\}-\frac{7\gamma-3}{12}rx^{*3}\end{aligned}$$

$$(45)\quad u^*_4=\frac{22052\gamma^3+83079\gamma^2+126162\gamma+123957}{497664}r^8-$$

$$-\frac{119648\gamma^3+436140\gamma^2+675693\gamma+632745}{622080}r^6+$$

$$+\frac{70208\gamma^3+236760\gamma^2+368433\gamma+328725}{207360}r^4-$$

$$-\frac{690256\gamma^3+2074680\gamma^2+3195081\gamma+2741985}{2488320}r^2+$$

$$+\frac{205436\gamma^3+605955\gamma^2+989751\gamma+917505}{4147200}+$$

$$+x^*\left\{\frac{4364\gamma^3+12525\gamma^2+9219\gamma+18990}{25920}r^6-\right.$$

$$-\frac{26032\gamma^3+73560\gamma^2+78627\gamma+112995}{46080}r^4+$$

$$+\frac{43184\gamma^3+116160\gamma^2+154269\gamma+183465}{69120}r^2-$$

$$\left.-\frac{124288\gamma^3+340140\gamma^2+538503\gamma+638325}{829440}\right\}+$$

$$+x^{*2}\left\{\frac{(184\gamma^2+642\gamma-45)\,(\gamma-3)}{1440}r^4-\right.$$

$$\left.-\frac{(184\gamma^2-282\gamma+315)\,(\gamma+3)}{720}r^2+\frac{676\gamma^3+1770\gamma^2+1926\gamma+7605}{8640}\right\}+$$

$$+x^{*3}\left\{\frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{72}r^2-\frac{44\gamma^2-447\gamma+477}{1152}\right\}+$$

$$+\frac{8\gamma^3+270\gamma^2-477\gamma+135}{2160}x^{*4}$$

$$(46)\quad v^*_4=\frac{893812\gamma^3+3691035\gamma^2+6079392\gamma+4903335}{12441600}r^9-$$

$$-\frac{2983712\gamma^3+12072780\gamma^2+20173167\gamma+16362675}{9953280}r^7+$$

$$+\frac{497312\gamma^3+1907268\gamma^2+3201669\gamma+2603745}{995328}r^5-$$

$$-\frac{3925808\gamma^3+13885560\gamma^2+23125563\gamma+18781065}{9953280}r^3+$$

$$+\frac{1017792\gamma^3+3277360\gamma^2+5348772\gamma+4319685}{8294400}r+$$

$$+x^*\left\{\frac{22052\gamma^3+83079\gamma^2+126162\gamma+123957}{62208}r^7-\right.$$

$$-\frac{119648\gamma^3+436140\gamma^2+675693\gamma+632745}{103680}r^5+$$

$$+\frac{70208\gamma^3+236760\gamma^2+368433\gamma+328725}{51840}r^3-$$

$$\left.-\frac{690256\gamma^3+2074680\gamma^2+3195081\gamma+2741985}{1244160}r\right\}+$$

$$+x^{*2}\left\{\frac{4364\gamma^3+12525\gamma^2+9219\gamma+18990}{8640}r^5-\right.$$

$$-\frac{26032\gamma^3+73560\gamma^2+78627\gamma+112995}{23040}r^3+$$

$$\left.+\frac{43184\gamma^3+116160\gamma^2+154269\gamma+183465}{69120}r\right\}+$$

$$+x^{*3}\left\{\frac{(184\gamma^2+642\gamma-45)(\gamma-3)}{1080}r^3-\right.$$

$$\left.-\frac{(184\gamma^2-282\gamma+315)(\gamma+3)}{1080}r\right\}+\frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{144}rx^{*4}$$

この節で得られた内部解は，関係式 (35) と級数 (37)，(38) が式 (3)，(4) に代入され E^* の同じベキの係数をそれぞれ等しいと置いて得られる，次の方程式の組を満たすことが容易に確かめられる。

$$(47)\quad v^*_{nr}+\frac{1}{r}v^*_n=\phi^*_n\quad (n\geqq 1)$$

ここで，ϕ^*_n は $u^*_1, u^*_2, \cdots, u^*_n$ および $v^*_1, v^*_2, \cdots, v^*_{n-1}$ のみの関数であり，その陽な表示は $n=1, 2, 3, 4$ に対して付録3に与えられる。式 (47) において $n=1$ の場合が遷音速小擾乱方程式である。

Hall の論文の式 (81) の z の係数および式 (82) の y^3 と y の係数には誤りが含まれている。本節の式 (43) の x^* の係数および式 (44) の r^3 と r の係数にそれぞれ訂正されるべきであろう。

4. 速度の大きさと向き，等速線の形，そして質量流

本節の解析は，前節で得られた内部解でもって，Hall の解析法に則して進められる。

速度の大きさ q と向き θ はそれぞれ次で与えられる。

$$(48)\quad q=(U^2+V^2)^{\frac{1}{2}},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right)$$

q, θ が次の如く，E^* で展開されるとき，

$$(49)\quad q=1+E^*q^*_1+E^{*2}q^*_2+E^{*3}q^*_3+E^{*4}q^*_4+\cdots)$$

$$(50)\quad \theta=\left(\frac{\gamma+1}{2}E^*\right)^{\frac{1}{2}}(E^*\theta^*_1+E^{*2}\theta^*_2+E^{*3}\theta^*_3+E^{*4}\theta^*_4+\cdots)$$

各級数の最初の 4 つの係数は，式 (48) への級数 (37)，(38) の代入，および解 (39)，(40)，…，(46) の使用により得られる結果が級数 (49)，(50) とそれぞれ比較されるとき，E^* の同じベキの係数を等しいと置くことにより，次で与えられる。

$$(51)\quad q^*_1=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}+x^*$$

$$(52)\quad q^*_2=\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2+\frac{10\gamma+57}{288}+x^*\left\{r^2-\frac{5}{8}\right\}-\frac{2\gamma-3}{6}x^{*2}$$

$$(53)\quad q^*_3=\frac{556\gamma^2+1899\gamma+3231}{10368}r^6-\frac{388\gamma^2+1233\gamma+1953}{2304}r^4+$$

$$+\frac{304\gamma^2+858\gamma+1269}{1728}r^2-\frac{2708\gamma^2+7839\gamma+14211}{82944}+$$

$$+x^*\left\{\frac{52\gamma^2+99\gamma+375}{384}r^4-\frac{52\gamma^2+99\gamma+303}{192}r^2+\right.$$

$$+\frac{92\gamma^2+180\gamma+639}{1152}\Big\}+x^{*2}\Big\{-\frac{5(\gamma-1)}{8}r^2+$$

$$+\frac{13\gamma-27}{48}\Big\}+\frac{4\gamma^2-57\gamma+27}{144}x^{*3}$$

(54) $$q^*{}_4=\frac{22052\gamma^3+89991\gamma^2+149922\gamma+140805}{497664}r^8-$$

$$-\frac{119648\gamma^3+460980\gamma^2+765333\gamma+697545}{622080}r^6+$$

$$+\frac{70208\gamma^3+244680\gamma^2+398493\gamma+350865}{207360}r^4-$$

$$-\frac{690256\gamma^3+2104920\gamma^2+3316041\gamma+2832705}{2488320}r^2+$$

$$+\frac{205436\gamma^3+605955\gamma^2+989751\gamma+917505}{4147200}+$$

$$+x^*\Big\{\frac{4364\gamma^3+15045\gamma^2+18894\gamma+26145}{25920}r^6-$$

$$-\frac{26032\gamma^3+82200\gamma^2+112467\gamma+138195}{46080}r^4+$$

$$+\frac{43184\gamma^3+122400\gamma^2+179229\gamma+202185}{69120}r^2-$$

$$-\frac{124288\gamma^3+340140\gamma^2+538503\gamma+638325}{829440}\Big\}+$$

$$+x^{*2}\Big\{\frac{184\gamma^3+330\gamma^2-831\gamma+1035}{1440}r^4-\frac{92\gamma^3+195\gamma^2-3\gamma+675}{360}r^2+$$

$$+\frac{676\gamma^3+1770\gamma^2+1926\gamma+7605}{8640}\Big\}+x^{*3}\Big\{\frac{4\gamma^2-75\gamma+9}{72}r^2-$$

$$-\frac{44\gamma^2-447\gamma+477}{1152}\Big\}+\frac{8\gamma^3+270\gamma^2-477\gamma+135}{2160}x^{*4}$$

(55) $$\theta^*{}_1=\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+rx^*$$

(56) $$\theta^*{}_2=\frac{8\gamma+15}{72}r^5-\frac{5(4\gamma+9)}{96}r^3+\frac{28\gamma+75}{288}r+x^*\Big\{\frac{4\gamma+9}{12}r^3-\frac{4\gamma+9}{12}r\Big\}$$

$$(57)\quad \theta^*_3=\frac{6836\gamma^2+16695\gamma+14211}{82944}r^7-\frac{3380\gamma^2+8703\gamma+7875}{13824}r^5+$$

$$+\frac{3424\gamma^2+9183\gamma+8964}{13824}r^3-\frac{5(1420\gamma^2+3915\gamma+4149)}{82944}r+$$

$$+x^*\left\{\frac{556\gamma^2+1113\gamma+981}{1728}r^5-\frac{388\gamma^2+801\gamma+693}{576}r^3+\right.$$

$$\left.+\frac{304\gamma^2+645\gamma+549}{864}r\right\}+x^{*2}\left\{\frac{52\gamma^2+3\gamma-33}{192}r^3-\right.$$

$$\left.-\frac{(13\gamma-3)(4\gamma+3)}{192}r\right\}-\frac{\gamma+1}{4}rx^{*3}$$

$$(58)\quad \theta^*_4=\frac{893812\gamma^3+2896335\gamma^2+3539367\gamma+1912410}{12441600}r^9-$$

$$-\frac{2983712\gamma^3+9741300\gamma^2+12587517\gamma+7209945}{9953280}r^7+$$

$$+\frac{497312\gamma^3+1591020\gamma^2+2167263\gamma+1319679}{995328}r^5-$$

$$-\frac{3925808\gamma^3+12090960\gamma^2+17231193\gamma+11138715}{9953280}r^3+$$

$$+\frac{1017792\gamma^3+3004160\gamma^2+4428822\gamma+3018285}{8294400}r+$$

$$+x^*\left\{\frac{88208\gamma^3+243096\gamma^2+242397\gamma+126333}{248832}r^7-\right.$$

$$-\frac{119648\gamma^3+330900\gamma^2+366543\gamma+205875}{103680}r^5+$$

$$+\frac{280832\gamma^3+755700\gamma^2+916587\gamma+549855}{207360}r^3-$$

$$\left.-\frac{690256\gamma^3+1778880\gamma^2+2312991\gamma+1460295}{1244160}r\right\}+$$

$$+x^{*2}\left\{\frac{4364\gamma^3+7725\gamma^2+489\gamma-1800}{8640}r^5-\right.$$

$$-\frac{26032\gamma^3+48720\gamma^2+28317\gamma+11565}{23040}r^3+$$

$$+\frac{43184\gamma^3+83880\gamma^2+82359\gamma+50895}{69120}r\Big\}+$$

$$+x^{*3}\left\{\frac{184\gamma^3-90\gamma^2-891\gamma-585}{1080}r^3-\frac{(92\gamma^2+45\gamma-63)\gamma}{540}r\right\}$$

一定な q に対して級数 (49) は q のその値に対する等速線の形を与える式となる。等速線を $x^*=f(r)$ の形に表現するために，次で定義される Q を導入し，

(59) $Q=(q-1)\dfrac{1}{E^*}$

級数 (49) を次の形に再配列し直す。

(60) $x^*=f_0(r,\ Q)+E^*f_1(r,\ Q)+E^{*2}f_2(r,\ Q)+E^{*3}f_3(r,\ Q)+\cdots$

ここで，f_0，…，f_3 は次である。

(61) $f_0=-\dfrac{1}{2}r^2+\dfrac{1}{4}+Q$

(62) $f_1=\dfrac{4\gamma+9}{48}r^2-\dfrac{4\gamma+21}{288}+Q\left\{-\dfrac{2\gamma+3}{6}r^2+\dfrac{4\gamma+9}{24}\right\}+\dfrac{2\gamma-3}{6}Q^2$

(62) $f_2=\dfrac{364\gamma^2+1089\gamma+909}{20736}r^6-\dfrac{52\gamma^2+63\gamma+27}{1536}r^4-\dfrac{652\gamma^2+1743\gamma+1629}{13824}r^2+$

$$+\frac{412\gamma^2+1134\gamma+1557}{41472}+Q\Big\{-\frac{52\gamma^2+291\gamma+279}{1152}r^4+$$

$$+\frac{68\gamma^2+123\gamma+81}{288}r^2-\frac{460\gamma^2+879\gamma+657}{6912}\Big\}+Q^2\Big\{-\frac{28\gamma^2-3\gamma-39}{96}r^2+$$

$$+\frac{28\gamma^2+29\gamma-27}{192}\Big\}+\frac{28\gamma^2-39\gamma+45}{144}Q^3$$

(64) $f_3=\dfrac{4588\gamma^3+62085\gamma^2+124938\gamma+78435}{2488320}r^8-$

$$-\frac{86432\gamma^3+336060\gamma^2+497547\gamma+289575}{2488320}r^6+$$

$$+\frac{34352\gamma^3+80280\gamma^2+92907\gamma+54675}{552960}r^4+$$

$$+\frac{146432\gamma^3+395160\gamma^2+573552\gamma+378405}{2488320}r^2-$$

$$-\frac{700592\gamma^3+1901160\gamma^2+2889747\gamma+2174985}{49766400}+$$

$$+Q\left\{\frac{12472\gamma^3+20910\gamma^2+1737\gamma-9045}{311040}r^6-\right.$$

$$-\frac{128\gamma^3-27780\gamma^2-59427\gamma-36855}{138240}r^4-$$

$$-\frac{62744\gamma^3+144570\gamma^2+187749\gamma+119205}{207360}r^2+$$

$$\left.+\frac{113072\gamma^3+241440\gamma^2+327987\gamma+224100}{1244160}\right\}+$$

$$+Q^2\left\{-\frac{1256\gamma^3+5130\gamma^2+5421\gamma+1395}{11520}r^4+\right.$$

$$+\frac{1616\gamma^3+2320\gamma^2+1891\gamma+1035}{3840}r^2-$$

$$\left.-\frac{4412\gamma^3+6495\gamma^2+7632\gamma+5040}{34560}\right\}+$$

$$+Q^3\left\{-\frac{584\gamma^3-510\gamma^2-801\gamma+405}{2160}r^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2336\gamma^3+1260\gamma^2-369\gamma+2835}{17280}\right\}+\frac{584\gamma^3-990\gamma^2+729\gamma-945}{4320}Q^4$$

“一次元的” 質量流に対するノズルを通っての質量流の比 Cd は次で定義される。

(65) $$Cd=2\int_0^1\left(\frac{\bar{\rho}\,\bar{u}}{\bar{\rho}^*\bar{a}^*}\right)_{x^*=0}r\,dr$$

ここで，$\bar{\rho}$ は流体の密度，$\bar{\rho}^*$ は流体の臨界密度である。等エントロピー流では，次の関係が成り立つ。

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^*}=\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}q^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

したがって，

$$Cd=2\int_0^1\left\{U\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}q^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\}_{x^*=0}rdr$$

級数 (37) と (49) の上式への代入およびそれぞれの摂動解の代入の後，積分されるならば次を与える。

$$(66)\quad Cd=1-(\gamma+1)E^{*2}\left\{\frac{1}{96}-\frac{8\gamma+21}{2304}E^*+\frac{754\gamma^2+1971\gamma+2007}{276480}E^{*2}-\right.$$

$$\left.-\frac{280736\gamma^3+770445\gamma^2+1117521\gamma+757620}{74649600}E^{*3}\right\}$$

Hall の論文の式 (87) の z の係数，式 (90) の y^3 と y の係数，そして式 (92) の R^{-3} と R^{-4} の係数には誤りが含まれている。本節の式 (53) の x^* の係数，式 (57) の r^3 と r の係数，そして式 (66) の E^{*3} と E^{*4} の係数にそれぞれ訂正されるべきであろう。

5. 数値計算例

$E^*=0.3,\ 0.2,\ 0.1$ で指定されるノズル内を通り過ぎる空気 ($\gamma=1.4$) の流れに対して，1-Cd の数値結果が Table 1 に示される。

Table 1

E^*	$1-Cd$			
	one term	*two terms*	*three terms*	*four terms*
0.3	0.0023	0.0013	0.0018	0.0014
0.2	0.00100	0.00073	0.00082	0.00077
0.1	0.000250	0.000216	0.000222	0.000220

上の数値結果は，急速に収束することを示している。事実，第 4 項までの値 (foure terms) は最後の桁が大きさにおいて 1 か 2 の誤差の範囲内で正確である。

以下では，$E^*=0.2,\ \gamma=1.4$ に対して，スロートを横切っての U 分布

(Table 2)，ノズル壁にそうての θ 分布 (Table 3)，そして x^* 軸にそうての U 分布 (Table 4) のそれぞれの数値結果が与えられる。それぞれの場合について，解の明白な収束性を示すために第1近似から第4近似までの数値結果が与えられる。

Table 2

r	$1+u^*$			
	1+*one term*	1+*two terms*	1+*three terms*	1+*four terms*
0.0	0.95	0.9599	0.9569	0.9585
0.2	0.954	0.9625	0.9601	0.9614
0.4	0.966	0.9709	0.9698	0.9703
0.6	0.986	0.9860	0.9864	0.9861
0.8	1.014	1.0099	1.0112	1.0105
1.0	1.05	1.0452	1.0464	1.0457

Table 3

x^*	x	r_w	θ (*degrees*)			
			one term	*two terms*	*three terms*	*four terms*
−0.6	−0.29	1.0086	−3.373	−3.388	−3.382	−3.364
−0.5	−0.24	1.0060	−2.807	−2.815	−2.815	−2.805
−0.4	−0.20	1.0038	−2.243	−2.248	−2.250	−2.244
−0.3	−0.15	1.0022	−1.682	−1.684	−1.686	−1.684
−0.2	−0.10	1.0010	−1.121	−1.122	−1.123	−1.123
−0.1	−0.05	1.0002	−0.561	−0.561	−0.561	−0.561
+0.0	+0.00	1.0000	+0.000	+0.000	+0.000	+0.000
+0.1	+0.05	1.0002	+0.562	+0.562	+0.561	+0.561
+0.2	+0.10	1.0010	+1.127	+1.127	+1.123	+1.123
+0.3	+0.15	1.0022	+1.694	+1.695	+1.686	+1.684
+0.4	+0.20	1.0038	+2.265	+2.269	+2.249	+2.244
+0.5	+0.24	1.0060	+2.841	+2.849	+2.815	+2.804

Table 4

x^*	x	$1+u^*$			
		1+*one term*	1+*two terms*	1+*three terms*	1+*four terms*
−0.1	−0.05	0.93	0.9424	0.9387	0.9407
+0.1	+0.05	0.97	0.9774	0.9752	0.9763
+0.3	+0.15	1.01	1.0125	1.0116	1.0120
+0.5	+0.24	1.05	1.0477	1.0478	1.0478
+0.7	+0.34	1.09	1.0830	1.0837	1.0835
+0.9	+0.44	1.13	1.1184	1.1192	1.1190
+1.1	+0.54	1.17	1.1540	1.1541	1.1542
+1.3	+0.64	1.21	1.1896	1.1884	1.1890

最後に，$\gamma=1.4$ として，$E^*=0.2$ で指定されるノズルに対する等速度線が $Q=0.9$, 1.0, 1.1 に対して Fig. 1 に示される。

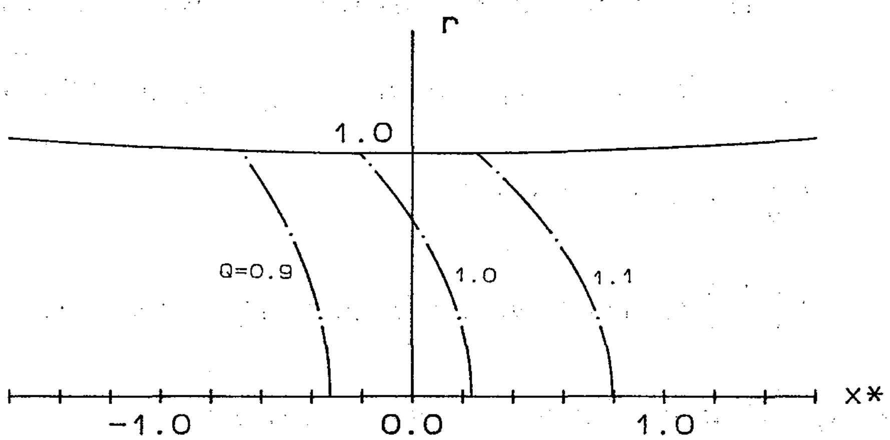

Fig. 1 Isobars

付録 1. (14) 式の右辺 ϕ_n ($n=1, \cdots, 8$)

(A1. 1) $$\phi_1=(\gamma+1)u_1u_{1x}+2v_1u_{1r}+(\gamma-1)u_1v_{1r}+(\gamma-1)\frac{u_1v_1}{r}$$

(A1. 2) $$\phi_2=(\gamma+1)(u_1u_{2x}+u_2u_{1x})+\frac{\gamma+1}{2}u_1{}^2u_{1x}+\frac{\gamma-1}{2}v_1{}^2u_{1x}+$$
$$+2(v_1u_{2r}+v_2u_{1r}+u_1v_1u_{1r})+$$
$$+(\gamma-1)(u_1v_{2r}+u_2v_{1r})+\frac{\gamma-1}{2}u_1{}^2v_{1r}+\frac{\gamma+1}{2}v_1{}^2v_{1r}+$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u_1v_2+2u_2v_1+u_1{}^2v_1+v_1{}^3)$$

(A1. 3) $$\phi_3=(\gamma+1)(u_1u_{3x}+u_2u_{2x}+u_3u_{1x})+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{2x}+2u_1u_2u_{1x})+$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}v_1(v_1u_{2x}+2v_2u_{1x})+$$
$$+2(v_1u_{3r}+v_2u_{2r}+v_3u_{1r}+u_1v_1u_{2r}+u_1v_2u_{1r}+u_2v_1u_{1r})+$$
$$+(\gamma-1)(u_1v_{3r}+u_2v_{2r}+u_3v_{1r})+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{2r}+2u_1u_2v_{1r})+$$
$$+\frac{\gamma+1}{2}v_1(v_1v_{2r}+2v_2v_{1r})+$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u_1v_3+2u_2v_2+2u_3v_1+u_1{}^2v_2+2u_1u_2v_1+3v_1{}^2v_2)$$

(A1. 4) $$\phi_4=(\gamma+1)(u_1u_{4x}+u_2u_{3x}+u_3u_{2x}+u_4u_{1x})+$$
$$+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{3x}+2u_1u_2u_{2x}+2u_1u_3u_{1x}+u_2{}^2u_{1x})+$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}(v_1{}^2u_{3x}+2v_1v_2u_{2x}+2v_1v_3u_{1x}+v_2{}^2u_{1x})+$$
$$+2(v_1u_{4r}+v_2u_{3r}+v_3u_{2r}+v_4u_{1r}+u_1v_1u_{3r}+u_1v_2u_{2r}+$$
$$+u_1v_3u_{1r}+u_2v_1u_{2r}+u_2v_2u_{1r}+u_3v_1u_{1r})+$$
$$+(\gamma-1)(u_1v_{4r}+u_2v_{3r}+u_3v_{2r}+u_4v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{3r}+2u_1u_2v_{2r}+2u_1u_3v_{1r}+u_2{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(v_1{}^2v_{3r}+2v_1v_2v_{2r}+2v_1v_3v_{1r}+v_2{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\ \frac{1}{r}(2u_1v_4+2u_2v_3+2u_3v_2+2u_4v_1+u_1{}^2v_3+$$

$$+2u_1u_2v_2+2u_1u_3v_1+u_2{}^2v_1+3v_1{}^2v_3+3v_1v_2{}^2)$$

(A1. 5) $$\phi_5=(\gamma+1)(u_1u_{5x}+u_2u_{4x}+u_3u_{3x}+u_4u_{2x}+u_5u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{4x}+2u_1u_2u_{3x}+2u_1u_3u_{2x}+2u_1u_4u_{1x}+u_2{}^2u_{2x}+$$

$$+2u_2u_3u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(v_1{}^2u_{4x}+2v_1v_2u_{3x}+2v_1v_3u_{2x}+2v_1v_4u_{1x}+v_2{}^2u_{2x}+$$

$$+2v_2v_3u_{1x})+$$

$$+2(v_1u_{5r}+v_2u_{4r}+v_3u_{3r}+v_4u_{2r}+v_5u_{1r}+u_1v_1u_{4r}+$$

$$+u_1v_2u_{3r}+u_1v_3u_{2r}+u_1v_4u_{1r}+u_2v_1u_{3r}+u_2v_2u_{2r}+u_2v_3u_{1r}+$$

$$+u_3v_1u_{2r}+u_3v_2u_{1r}+u_4v_1u_{1r})+$$

$$+(\gamma-1)(u_1v_{5r}+u_2v_{4r}+u_3v_{3r}+u_4v_{2r}+u_5v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{4r}+2u_1u_2v_{3r}+2u_1u_3v_{2r}+2u_1u_4v_{1r}+u_2{}^2v_{2r}+$$

$$+2u_2u_3v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(v_1{}^2v_{4r}+2v_1v_2v_{3r}+2v_1v_3v_{2r}+2v_1v_4v_{1r}+v_2{}^2v_{2r}+$$

$$+2v_2v_3v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\ \frac{1}{r}(2u_1v_5+2u_2v_4+2u_3v_3+2u_4v_2+2u_5v_1+u_1{}^2v_4+$$

$$+2u_1u_2v_3+2u_1u_3v_2+2u_1u_4v_1+u_2{}^2v_2+2u_2u_3v_1+3v_1{}^2v_4+$$

$$+6v_1v_2v_3+v_2{}^3)$$

$$(A1.6)\quad \phi_6=(\gamma+1)(u_1u_{6x}+u_2u_{5x}+u_3u_{4x}+u_4u_{3x}+u_5u_{2x}+u_6u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{5x}+2u_1u_2u_{4x}+2u_1u_3u_{3x}+2u_1u_4u_{2x}+2u_1u_5u_{1x}+$$

$$+u_2{}^2u_{3x}+2u_2u_3u_{2x}+2u_2u_4u_{1x}+u_3{}^2u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(v_1{}^2u_{5x}+2v_1v_2u_{4x}+2v_1v_3u_{3x}+2v_1v_4u_{2x}+2v_1v_5u_{1x}+$$

$$+v_2{}^2u_{3x}+2v_2v_3u_{2x}+2v_2v_4u_{1x}+v_3{}^2u_{1x})+$$

$$+2(v_1u_{6r}+v_2u_{5r}+v_3u_{4r}+v_4u_{3r}+v_5u_{2r}+v_6u_{1r}+u_1v_1u_{5r}+$$

$$+u_1v_2u_{4r}+u_1v_3u_{3r}+u_1v_4u_{2r}+u_1v_5u_{1r}+u_2v_1u_{4r}+u_2v_2u_{3r}+$$

$$+u_2v_3u_{2r}+u_2v_4u_{1r}+u_3v_1u_{3r}+u_3v_2u_{2r}+u_3v_3u_{1r}+u_4v_1u_{2r}+$$

$$+u_4v_2u_{1r}+u_5v_1u_{1r})+$$

$$+(\gamma-1)(u_1v_{6r}+u_2v_{5r}+u_3v_{4r}+u_4v_{3r}+u_5v_{2r}+u_6v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{5r}+2u_1u_2v_{4r}+2u_1u_3v_{3r}+2u_1u_4v_{2r}+2u_1u_5v_{1r}+$$

$$+u_2{}^2v_{3r}+2u_2u_3v_{2r}+2u_2u_4v_{1r}+u_3{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(v_1{}^2v_{5r}+2v_1v_2v_{4r}+2v_1v_3v_{3r}+2v_1v_4v_{2r}+2v_1v_5v_{1r}+$$

$$+v_2{}^2v_{3r}+2v_2v_3v_{2r}+2v_2v_4v_{1r}+v_3{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u_1v_6+2u_2v_5+2u_3v_4+2u_4v_3+2u_5v_2+2u_6v_1+$$

$$+u_1{}^2v_5+2u_1u_2v_4+2u_1u_3v_3+2u_1u_4v_2+2u_1u_5v_1+u_2{}^2v_3+$$

$$+2u_2u_3v_2+2u_2u_4v_1+u_3{}^2v_1+3v_1{}^2v_5+6v_1v_2v_4+3v_1v_3{}^2+$$

$$+3v_2{}^2v_3)$$

$$(A1.7)\quad \phi_7=(\gamma+1)(u_1u_{7x}+u_2u_{6x}+u_3u_{5x}+u_4u_{4x}+u_5u_{3x}+u_6u_{2x}+$$

$$+u_7u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{6x}+2u_1u_2u_{5x}+2u_1u_3u_{4x}+2u_1u_4u_{3x}+2u_1u_5u_{2x}+$$

$$+2u_1u_6u_{1x}+u_2{}^2u_{4x}+2u_2u_3u_{3x}+2u_2u_4u_{2x}+2u_2u_5u_{1x}+$$

$$+u_3{}^2u_{2x}+2u_3u_4u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(v_1{}^2u_{6x}+2v_1v_2u_{5x}+2v_1v_3u_{4x}+2v_1v_4u_{3x}+2v_1v_5u_{2x}+$$

$$+2v_1v_6u_{1x}+v_2{}^2u_{4x}+2v_2v_3u_{3x}+2v_2v_4u_{2x}+2v_2v_5u_{1x}+$$

$$+v_3{}^2u_{2x}+2v_3v_4u_{1x})+$$

$$+2(v_1u_{7r}+v_2u_{6r}+v_3u_{5r}+v_4u_{4r}+v_5u_{3r}+v_6u_{2r}+v_7u_{1r}+$$

$$+u_1v_1u_{6r}+u_1v_2u_{5r}+u_1v_3u_{4r}+u_1v_4u_{3r}+u_1v_5u_{2r}+u_1v_6u_{1r}+$$

$$+u_2v_1u_{5r}+u_2v_2u_{4r}+u_2v_3u_{3r}+u_2v_4u_{2r}+u_2v_5u_{1r}+u_3v_1u_{4r}+$$

$$+u_3v_2u_{3r}+u_3v_3u_{2r}+u_3v_4u_{1r}+u_4v_1u_{3r}+u_4v_2u_{2r}+u_4v_3u_{1r}+$$

$$+u_5v_1u_{2r}+u_5v_2u_{1r}+u_6v_1u_{1r})+$$

$$+(\gamma-1)(u_1v_{7r}+u_2v_{6r}+u_3v_{5r}+u_4v_{4r}+u_5v_{3r}+u_6v_{2r}+u_7v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{6r}+2u_1u_2v_{5r}+2u_1u_3v_{4r}+2u_1u_4v_{3r}+2u_1u_5v_{2r}+$$

$$+2u_1u_6v_{1r}+u_2{}^2v_{4r}+2u_2u_3v_{3r}+2u_2u_4v_{2r}+2u_2u_5v_{1r}+$$

$$+u_3{}^2v_{2r}+2u_3u_4v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(v_1{}^2v_{6r}+2v_1v_2v_{5r}+2v_1v_3v_{4r}+2v_1v_4v_{3r}+2v_1v_5v_{2r}+$$

$$+2v_1v_6v_{1r}+v_2{}^2v_{4r}+2v_2v_3v_{3r}+2v_2v_4v_{2r}+2v_2v_5v_{1r}+$$

$$+v_3{}^2v_{2r}+2v_3v_4v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u_1v_7+2u_2v_6+2u_3v_5+2u_4v_4+2u_5v_3+2u_6v_2+$$

$$+2u_7v_1+u_1{}^2v_6+2u_1u_2v_5+2u_1u_3v_4+2u_1u_4v_3+2u_1u_5v_2+$$

$$+2u_1u_6v_1+u_2{}^2v_4+2u_2u_3v_3+2u_2u_4v_2+2u_2u_5v_1+u_3{}^2v_2+$$

$$+2u_3u_4v_1+3v_1{}^2v_6+6v_1v_2v_5+6v_1v_3v_4+3v_2{}^2v_4+3v_2v_3{}^2)$$

(A1. 8) $$\phi_8=(\gamma+1)(u_1u_{8x}+u_2u_{7x}+u_3u_{6x}+u_4u_{5x}+u_5u_{4x}+u_6u_{3x}+$$

$$+u_7u_{2x}+u_8u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(u_1{}^2u_{7x}+2u_1u_2u_{6x}+2u_1u_3u_{5x}+2u_1u_4u_{4x}+2u_1u_5u_{3x}+$$

$$+2u_1u_6u_{2x}+2u_1u_7u_{1x}+u_2{}^2u_{5x}+2u_2u_3u_{4x}+2u_2u_4u_{3x}+$$

$$+2u_2u_5u_{2x}+2u_2u_6u_{1x}+u_3{}^2u_{3x}+2u_3u_4u_{2x}+2u_3u_5u_{1x}+$$

$$+u_4{}^2u_{1x})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(v_1{}^2u_{7x}+2v_1v_2u_{6x}+2v_1v_3u_{5x}+2v_1v_4u_{4x}+2v_1v_5u_{3x}+$$

$$+2v_1v_6u_{2x}+2v_1v_7u_{1x}+v_2{}^2u_{5x}+2v_2v_3u_{4x}+2v_2v_4u_{3x}+$$

$$+2v_2v_5u_{2x}+2v_2v_6u_{1x}+v_3{}^2u_{3x}+2v_3v_4u_{2x}+2v_3v_5u_{1x}+$$

$$+v_4{}^2u_{1x})+$$

$$+2(v_1u_{8r}+v_2u_{7r}+v_3u_{6r}+v_4u_{5r}+v_5u_{4r}+v_6u_{3r}+v_7u_{2r}+$$

$$+v_8u_{1r}+u_1v_1u_{7r}+u_1v_2u_{6r}+u_1v_3u_{5r}+u_1v_4u_{4r}+u_1v_5u_{3r}+$$

$$+u_1v_6u_{2r}+u_1v_7u_{1r}+u_2v_1u_{6r}+u_2v_2u_{5r}+u_2v_3u_{4r}+u_2v_4u_{3r}+$$

$$+u_2v_5u_{2r}+u_2v_6u_{1r}+u_3v_1u_{5r}+u_3v_2u_{4r}+u_3v_3u_{3r}+u_3v_4u_{2r}+$$

$$+u_3v_5u_{1r}+u_4v_1u_{4r}+u_4v_2u_{3r}+u_4v_3u_{2r}+u_4v_4u_{1r}+u_5v_1u_{3r}+$$

$$+u_5v_2u_{2r}+u_5v_3u_{1r}+u_6v_1u_{2r}+u_6v_2u_{1r}+u_7v_1u_{1r})+$$

$$+(\gamma-1)(u_1v_{8r}+u_2v_{7r}+u_3v_{6r}+u_4v_{5r}+u_5v_{4r}+u_6v_{3r}+$$

$$+u_7v_{2r}+u_8v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}(u_1{}^2v_{7r}+2u_1u_2v_{6r}+2u_1u_3v_{5r}+2u_1u_4v_{4r}+2u_1u_5v_{3r}+$$

$$+2u_1u_6v_{2r}+2u_1u_7v_{1r}+u_2{}^2v_{5r}+2u_2u_3v_{4r}+2u_2u_4v_{3r}+$$

$$+2u_2u_5v_{2r}+2u_2u_6v_{1r}+u_3{}^2v_{3r}+2u_3u_4v_{2r}+2u_3u_5v_{1r}+$$

$$+u_4{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(v_1{}^2v_{7r}+2v_1v_2v_{6r}+2v_1v_3v_{5r}+2v_1v_4v_{4r}+2v_1v_5v_{3r}+$$

$$+2v_1v_6v_{2r}+2v_1v_7v_{1r}+v_2{}^2v_{5r}+2v_2v_3v_{4r}+2v_2v_4v_{3r}+$$

$$+2v_2v_5v_{2r}+2v_2v_6v_{1r}+v_3{}^2v_{3r}+2v_3v_4v_{2r}+2v_3v_5v_{1r}+v_4{}^2v_{1r})+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u_1v_8+2u_2v_7+2u_3v_6+2u_4v_5+2u_5v_4+2u_6v_3+$$

$$+2u_7v_2+2u_8v_1+u_1{}^2v_7+2u_1u_2v_6+2u_1u_3v_5+2u_1u_4v_4+$$

$$+2u_1u_5v_3+2u_1u_6v_2+2u_1u_7v_1+u_2{}^2v_5+2u_2u_3v_4+2u_2u_4v_3+$$

$$+2u_2u_5v_2+2u_2u_6v_1+u_3{}^2v_3+2u_3u_4v_2+2u_3u_5v_1+u_4{}^2v_1+$$

$$+3v_1{}^2v_7+6v_1v_2v_6+6v_1v_3v_5+3v_1v_4{}^2+3v_2{}^2v_5+6v_2v_3v_4+v_3{}^3)$$

付録 2. (15) 式の右辺 $\psi_n(n=1,\ \cdots,\ 8)$

(A2. 1) $\psi_2=x$

(A2. 2) $\psi_3=xu_1(x,\ 1)$

(A2. 3) $\psi_4=xu_2(x,\ 1)-\frac{1}{2}x^2v_{2r}(x,\ 1)$

(A2. 4) $\psi_5=xu_3(x,\ 1)-\frac{1}{2}x^2v_{3r}(x,\ 1)+\frac{1}{2}x^3u_{1r}(x,\ 1)$

(A2. 5) $\psi_6=xu_4(x,\ 1)-\frac{1}{2}x^2v_{4r}(x,\ 1)+\frac{1}{2}x^3u_{2r}(x,\ 1)-\frac{1}{8}x^4v_{2rr}(x,\ 1)$

(A2. 6) $\psi_7=xu_5(x,\ 1)-\frac{1}{2}x^2v_{5r}(x,\ 1)+\frac{1}{2}x^3u_{3r}(x,\ 1)-\frac{1}{8}x^4v_{3rr}(x,\ 1)+$

$+\frac{1}{8}x^5u_{1rr}(x,\ 1)$

(A2. 7) $\psi_8=xu_6(x,\ 1)-\frac{1}{2}x^2v_{6r}(x,\ 1)+\frac{1}{2}x^3u_{4r}(x,\ 1)-\frac{1}{8}x^4v_{4rr}(x,\ 1)+$

$+\frac{1}{8}x^5u_{2rr}(x,\ 1)-\frac{1}{48}x^6v_{2rrr}(x,\ 1)$

$$(A2.8)\quad \phi_9 = xu_7(x,\ 1) - \frac{1}{2}x^2 v_{7r}(x,\ 1) + \frac{1}{2}x^3 u_{5r}(x,\ 1) - \frac{1}{8}x^4 v_{5rr}(x,\ 1) + \\ + \frac{1}{8}x^5 u_{3rr}(x,\ 1) - \frac{1}{48}x^6 v_{3rrr}(x,\ 1) + \frac{1}{48}x^7 u_{1rrr}(x,\ 1)$$

付録 3. (47) 式の右辺 $\phi^*_n(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$$(A3.1)\quad \phi^*_1 = 2u^*_1 u^*_{1x}{}^*$$

$$(A3.2)\quad \phi^*_2 = 2(u^*_1 u^*_{2x}{}^* + u^*_2 u^*_{1x}{}^*) + u^*_1{}^2 u^*_{1x}{}^* + 2v^*_1 u^*_{1r} + \\ + (\gamma-1) u^*_1 v^*_{1r} + \frac{\gamma-1}{r} u^*_1 v^*_1$$

$$(A3.3)\quad \phi^*_3 = 2(u^*_1 u^*_{3x}{}^* + 2u^*_2 u^*_{2x}{}^* + 2u^*_3 u^*_{1x}{}^*) + u^*_1{}^2 u^*_{2x}{}^* + \\ + 2u^*_1 u^*_2 u^*_{1x}{}^* + \frac{\gamma-1}{2} v^*_1{}^2 u^*_{1x}{}^* + \\ + 2(v^*_1 u^*_{2r} + v^*_2 u^*_{1r} + u^*_1 v^*_1 u^*_{1r}) + \\ + (\gamma-1)(u^*_1 v^*_{2r} + u^*_2 v^*_{1r}) + \frac{\gamma-1}{2} u^*_1{}^2 v^*_{1r} + \\ + \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u^*_1 v^*_2 + 2u^*_2 v^*_1 + u^*_1{}^2 v^*_1)$$

$$(A3.4)\quad \phi^*_4 = 2(u^*_1 u^*_{4x}{}^* + u^*_2 u^*_{3x}{}^* + u^*_3 u^*_{2x}{}^* + u^*_4 u^*_{1x}{}^*) + \\ + u^*_1{}^2 u^*_{3x}{}^* + 2u^*_1 u^*_2 u^*_{2x}{}^* + 2u^*_1 u^*_3 u^*_{1x}{}^* + u^*_2{}^2 u^*_{1x}{}^* + \\ + \frac{\gamma-1}{2} v^*_1 (v^*_1 u^*_{2x}{}^* + 2v^*_2 u^*_{1x}{}^*) + \\ + 2(v^*_1 u^*_{3r} + v^*_2 u^*_{2r} + v^*_3 u^*_{1r} + u^*_1 v^*_1 u^*_{2r} + \\ + u^*_1 v^*_2 u^*_{1r} + u^*_2 v^*_1 u^*_{1r}) + \\ + (\gamma-1)(u^*_1 v^*_{3r} + u^*_2 v^*_{2r} + u^*_3 v^*_{1r}) + \\ + \frac{\gamma-1}{2}(u^*_1{}^2 v^*_{2r} + 2u^*_1 u^*_2 v^*_{1r}) + \frac{(\gamma+1)^2}{4} v^*_1{}^2 v^*_{1r} +$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{r}(2u^*{}_1v^*{}_3+2u^*{}_2v^*{}_2+2u^*{}_3v^*{}_1+u^*{}_1{}^2v^*{}_2+$$

$$+2u^*{}_1u^*{}_2v^*{}_1+\frac{\gamma+1}{2}v^*{}_1{}^3)$$

引　用　文　献

1）山口巖：親和女子大学『研究論叢』第20号，昭和61年11月，pp. 134-151.

2）T. C. Adamson, Jr., A. F. Messiter and G. K. Richey: Arch. Mech. Stos. **24** (1974) pp. 617-628.

3）I. M. Hall: Quart. Journ. Mech. and Applied Math. **15** (1962) pp. 487-508.